skupina A ------------------------------

1) Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

2) Určete Taylorův polynom čtvrtého stupně funkce f v bodě $x_0=-1$, kde

$$f(x)=x^6+x^5-4x^3+2x-5.$$

3) Určete rovnici tečny a normály k funkci $f(x)=x+\frac{4}{3x}$ v bodě T[-1,?].

Teorie: Vysvětlete pojem „normála“.

4) Určete parametr k tak, aby byly následující vektory lineárně nezávislé:

$$(5,3,4),(-4,6,1),(-1,k,2).$$

5) Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice:

$$3x-5y=11$$
$$-2x+3y=-7$$

Teorie: Napište definici inverzní matice.

6) Určete determinant matice

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Výsledky:

1) 4/3
2) $T_4(x)=-3-11(x+1)+17(x+1)^2+26(x+1)^3-25(x+1)^4$
3) Tečna: $y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$, Normála: $y=3x+\frac{2}{3}$
4) $k\neq 5$
5) x = 2, y = -1
6) det = -4

skupina B ------------------------------

1) Určete rovnici tečny k funkci $f(x) = -x^2 + 5x - 1$ rovnoběžné s přímkou $p: y = 3x - 7$.
2) Určete všechny asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 3}{3 - x}\ .$$

Teorie: Jaké druhy asymptot existují? Popište je.

3) Určete globální (absolutní) extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $\langle -1; 1\rangle$.

4) Určete inverzní matici k matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Vypočítejte z maticové rovnice matici X.

$$AX - 2A = BX - C$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Určete hodnost matice v závislosti na parametru k

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Teorie: Definujte pojem „hodnost matice“.

Výsledky:

1) Tečna y = 3x
2) x = 3, y = -2x + 3
3) globální maximum [0;1], globální minima [-1;0,5],[1;0,5]
4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
5) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
6) h = 3 pro k = 3, h = 4 pro k ≠ 3

skupina C ------------------------------

1) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ konkávní, resp. konvexní. Určete inflexní body.
Teorie: Vysvětlete pojem inflexní bod.

2) Určete Taylorův polynom třetího stupně funkce f v bodě $x_0 = 0$, kde
$$f(x) = \sqrt{1-2x}.$$

3) Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu $arccotg\ 0{,}99$.

4) Nalezněte maximum funkce $z = 16x_1 + 28x_2 + 20x_3$ za podmínek:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 28$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 44$$

5) Určete parametr k tak, aby byla matice regulární:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & k \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Teorie: Co je to regulární matice?

6) Řešte soustavu lineárních rovnic Gaussovou eliminací:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky:

1) Konkávní $(0; e^{-1})$, konvexní $(e^{-1}, +\infty)$, inflexní bod $x = e^{-1}$
2) $T_3(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$
3) $arccotg\ 0{,}99 \cong \frac{1}{200} + \frac{\pi}{4}$
4) $x_1 = 4, x_2 = 12, z = 400$
5) $k \neq 2$
6) $\left[-\frac{t}{5} - 1; \frac{2t}{5} + 1; \frac{4t}{5} + 1; t\right], t \in R$