skupina A 2. písemka ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\frac{x-3}{2} + \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$.

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

3) Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$. Dále určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^2e^{-x}$ rostoucí či klesající a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima a minima.

1

$-1 \le \frac{x-3}{2} \le 1$

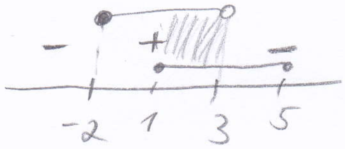
$-2 \le x-3 \le 2$

$1 \le x \le 5$

$\frac{x+2}{3-x} \ge 0$

$3-x \ne 0$

$3 \ne x$



$\underline{Df = \langle 1, 3)}$

2

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

3

$y = \frac{3x+2}{2x-1}$

$Df = R \setminus \{1/2\} = Hf^{-1}$

$x = \frac{3y+2}{2y-1}$

$2xy - x = 3y+2$

$y(2x-3) = x+2$

$\boxed{y = \frac{x+2}{2x-3}}$

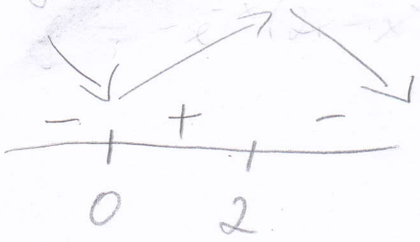
$Df^{-1} = R \setminus \{3/2\} = Hf$

4

$f = x^2 \cdot e^{-x}$

$Df = R$

$f' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(2x - x^2)$



$e^{-x}(2x-x^2) = 0$

$x(2-x) = 0$

$x = 0 \quad x = 2$

kles. $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$

rost. $(0, 2)$

lok. min. $x = 0$

lok. max. $x = 2$

skupina C   2. písemka   ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+5x+4)}{\sqrt{x+3}}$.

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$$

3) Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = \log_4(x-2)+3$. Dále určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ rostoucí či klesající a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima a minima.

① $x^2+5x+4>0$ $\quad x+3>0$

$(x+4)(x+1)$ $\quad x>-3$ $\qquad D f = (-1,\infty)$

$+ \quad - \quad +$

$-4 \quad -1$ $\qquad -4 \quad -3 \quad -1$

② $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=}$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}{\cos x} = \underline{\underline{2}}$

③ $x = \log_4(y-2)+3$ $\qquad x-2>0$

$x-3 = \log_4(y-2)$ $\qquad Df = (2,\infty) = Hf^{-1}$

$\boxed{4^{x-3}+2 = y}$ $\qquad Df^{-1} = R = Hf$

④ $f = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\qquad Df = R\setminus\{-1\}$

$f' = \dfrac{1(x+1)^2 - x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{(x+1)[x+1-2x]}{(x+1)^4} = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$

$\dfrac{1-x}{(x+1)^3} = 0$ $\qquad - \quad + \quad -$

$1-x=0$ $\qquad -1 \quad 1$

$1=x$

rost. $(-1,1)$

kles. $(-\infty,-1),(1,\infty)$

lok. max. $x=1$

lok. min. nemá!

skupina D 2. písemka ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln\frac{x-4}{2-x} + \sqrt{3-x}$.

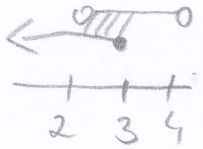
2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

3) Určete rovnice všech asymptot funkce $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = xe^{-x}$ konvexní či konkávní a určete inflexní body.

① $\frac{x-4}{2-x} > 0$ $\quad 3-x \geq 0$ $\quad 3 \geq x$



$-$ $\oplus$ $-$; 2, 4

$2-x \neq 0$ $\quad x \neq 2$

$D_f = (2, 3\rangle$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}$

③ $D_f = R\setminus\{2\}$ as. bez směrnice

$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{2x-4} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \Rightarrow \boxed{x=2}$

$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$

$q = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{2(x-2)} - \frac{1x}{2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3-x(x-2)}{2(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{2x-4} = 1$

$y = kx+q \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x+1}$ as. se směrnicí

④ $f = x\cdot e^{-x}$ $\quad f' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x} - xe^{-x}$

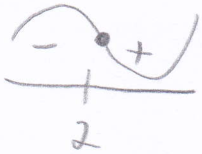
$f'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$

$D_f = R$

$e^{-x}(x-2) = 0$

$x-2 = 0$

$x = 2$



konkávní $(-\infty, 2)$

konvexní $(2, \infty)$

inflexní bod $x = 2$