Derivace funkce - příklady

Základní vzorce

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
k	0	k je konstanta
x	1	$x \in \mathbf{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbf{R},\ a > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbf{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{cotgh}\, x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$

Tabulka 1

Pravidla derivování

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
$\alpha u + \beta v$	$\alpha u' + \beta v'$	$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstanty, u, v funkce
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
$y = f(x),\ x = f^{-1}(y)$	$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$	f, f^{-1} navzájem inverzní funkce
$f(\varphi(x))$	$f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$	

Tabulka 2

Příklady

1. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li
   (a) $f(x) = x$;
   (b) $f(x) = 3x^2 + 1$;
   (c) $f(x) = \frac{x}{5}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x}$;
   (e) $f(x) = \sqrt{x}$.

   Řešení:

   (a) $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$;

   (b) $f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 6x$;

   (c) $f'(x) = \frac{x}{5} = \frac{1}{5} \cdot x = \frac{1}{5} \cdot x^0 = \frac{1}{5}$;

   (d) $f'(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;

   (e) $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$;
(b) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$;
(c) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-2}$;
(d) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$;
(e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
(f) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$;
(g) $f(z) = \dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$;
(h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$, $\quad a, b$ konst.;
(i) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$;
(j) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$;
(k) $f(t) = 2t\sin t - (t^2-2)\cos t$;
(l) $f(x) = x \arcsin x$;
(m) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
(n) $f(x) = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$;
(o) $f(x) = x^7 \cdot e^x$;
(p) $f(x) = e^{-x} \operatorname{arctg} x$;
(q) $f(x) = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$;
(r) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$;
(s) $f(x) = \ln x \log x - \ln a \log_a x$;
(t) $f(t) = 5^t \operatorname{tg} t$;
(u) $f(u) = (u^2 - 2u - 1)\cosh u$;
(v) $f(v) = 3\operatorname{tgh} v - v^2 \operatorname{cotgh} v$;
(w) $f(x) = \frac{x^2}{\sinh x}$;
(x) $f(x) = \frac{3\operatorname{cotgh} x}{\ln x}$;

Výsledek:
(a) $5x^4 - 12x^2 + 2$;
(b) $-\frac{\pi}{x^2}$, $\quad x \neq 0$;
(c) $2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-3}$, $x \neq 0$;
(d) $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$;
(e) $-\frac{2}{(x-1)^2}$, $\quad x \neq 1$;
(f) $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$, $\quad x \neq \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$;
(g) $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$, $z > 0, z \neq 1$;
(h) $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$;
(i) $5\cos x - 3\sin x$;
(j) $\frac{4}{\sin^2 2x}$, $\quad x \neq k\frac{\pi}{2}$;
(k) $t^2 \sin t$;
(l) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
$x \in (-1, 1)$;
(m) $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$;
(n) $-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$,
$x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$;
(o) $x^6 e^x (x + 7)$;
(p) $e^{-x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right)$;
(q) $3x^2 \ln x$, $x > 0$;
(r) $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$, $x > 0$;
(s) $\dfrac{2\ln x}{x \ln 10} - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;
(t) $\dfrac{5^t(\ln 5 \sin 2t + 2)}{2\cos^2 t}$, $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$,
$k \in \mathbf{Z}$;
(u) $(2u - 2)\cosh u + (2u^2 - 2u - 1)\sinh u$;
(v) $\frac{3}{\cosh^2 v} - 2v \operatorname{cotgh} v + \frac{v^2}{\sinh^2 v}$, $v \neq 0$;
(w) $\frac{2x\sinh x - x^2\cosh x}{\sinh^2 x}$, $x \neq 0$;
(x) $\frac{-3(x\ln x + \sinh x \cosh x)}{x\ln^2 x \cdot \sinh^2 x}$, $x > 0$;

3. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li
(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;
(b) $f(x) = e^{x^2}$;
(c) $f(x) = \sin^5 x$;
(d) $f(x) = 2^{\sin x^2}$;
(e) $f(x) = \ln(\arcsin 5x)$;

Poznámka Než získáme dostatečnou zručnosti při výpočtu derivací, bývá vhodné si složené funkce napsat jako řetězec základních elementárních funkcí.

Řešení:

(a) Platí $y = \sqrt{u}, u = 1 - x^2$, tedy

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} -2x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Platí $y = e^u, u = x^2$, tedy

$$y' = e^u \cdot u' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

(c) Platí $y = u^5, u = \sin x$, tedy

$$y' = 5u^4 \cdot u' = 5 \sin^4 x \cdot \cos x.$$

(d) Platí $y = 2^u, u = \sin v, v = x^2$, tedy

$$y' = 2^u \ln 2 \cdot u' = 2^u \ln 2 \cos v \cdot v' = 2^u \ln 2 \cos v (2x).$$

jestliže tento výsledek shrneme, dostaneme

$$f'(x) = 2x \cdot 2^{\sin x^2} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^2 = x 2^{1+\sin x^2} \ln 2 \cos x^2.$$

(e) Analogicky $y = \ln u, u = \arcsin v, v = 5x$, tedy

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot v' = \frac{5}{u\sqrt{1-v^2}},$$

neboli

$$f'(x) = \frac{5}{\arcsin 5x \sqrt{1-25x^2}}, \quad x \in (0, \frac{1}{5}).$$

4. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$;
(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;
(c) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}}$;
(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$;
(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a \neq 0$;
(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$;
(g) $f(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $a > 0$;
(h) $f(x) = \cos^2 x$;
(i) $f(x) = 3 \sin^2 x - \sin^3 x$;
(j) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$;
(k) $f(x) = \sin^2(\cos 3x)$;
(l) $f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}$;
(m) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x^2}$;
(n) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tgh} x}{\cosh^2 x}$;
(o) $f(x) = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;
(p) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;
(q) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$;
(r) $f(x) = e^{\sin^2 x}$;
(s) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg} \frac{1}{x}}$;

Výsledek:

(a) $30(3 - 10x)(1 + 3x - 5x^2)^{29}$;

(b) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$;

(c) $\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}, x \neq -\dfrac{1}{2},\ 0$;

(d) $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}},\ x \neq 0$;

(e) $\dfrac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$;

(f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

(g) $-\dfrac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}},\ x \in (-a,a)$;

(h) $-\sin 2x$;

(i) $\dfrac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$;

(j) $1+\operatorname{tg}^6 x$, vyjádřete $\cos^2 x$ pomocí $\operatorname{tg} x, x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$;

(k) $-3\sin 3x \sin(2\cos 3x)$;

(l) $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$;

(m) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}},\ |x|>1$;

(n) $\dfrac{1-3\operatorname{tgh}^2 x}{\cosh^2 x}$;

(o) $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}},\ x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$;

(p) $\dfrac{5}{x^4+13x^2+36}$;

(q) $\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{1}{x\ln x},\ x>1$;

(r) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$;

(s) $\dfrac{3^{\operatorname{cotg}\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2\sin^2\dfrac{1}{x}},\ x \neq 0, \dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbf{Z}-\{0\}$;