PARCIÁLNÍ DERIVACE

Určete parciální derivace prvního řádu:

$$\text{a) } z = 3x^2 - 5y^3 + 1 \qquad \text{b) } z = 4\sqrt[3]{x^5} - \ln y^2$$
$$\text{c) } z = 5x^2y^4 \qquad \text{d) } z = 5x^3y^2 - x^2y^3$$
$$\text{e) } z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \qquad \text{f) } z = \sin x \cdot \ln y$$

Výsledky 3.1. a) $[z_x = 6x,\ z_y = -15y^2]$, b) $[z_x = \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2},\ z_y = -\frac{2}{y}]$, c) $[z_x = 10xy^4,\ z_y = 20x^2y^3\ ]$, d) $[z_x = 15x^2y^2 - 2xy^3,\ z_y = 10x^3y - 3x^2y^2]$, e) $[z_x = 4x^3 - 8xy^2,\ z_y = 4y^3 - 8x^2y]$, f) $[z_x = \cos x \cdot \ln y,\ z_y = \frac{\sin x}{y}\ ]$.

Cvičení 3.5. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

$$\text{a) } z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \qquad \text{b) } z = e^{xy}$$
$$\text{c) } z = e^{\frac{-x}{y}} \qquad \text{d) } z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$$

Výsledky 3.5. a) $[z_x = \frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}\ln 3,\ z_y = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}\ln 3]$, b) $[z_x = y \cdot e^{xy}$, $z_y = x \cdot e^{xy}\ ]$, c) $[z_x = \frac{-1}{y} \cdot e^{\frac{-x}{y}},\ z_y = \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{-x}{y}}\ ]$, d) $[z_x = e^{\frac{y}{x}}(1 - \frac{y}{x}),\ z_y = e^{\frac{y}{x}}]$.

Cvičení 3.6. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

$$\text{a) } z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \qquad \text{b) } z = \ln\frac{x - y}{x + y}$$
$$\text{c) } z = \arcsin\frac{x}{y} \qquad \text{d) } z = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\text{e) } z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad \text{f) } z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Výsledky 3.6. a) $[z_x = \frac{x}{x^2+y^2},\ z_y = \frac{y}{x^2+y^2},\ ]$, b) $[z_x = \frac{2y}{x^2-y^2},\ z_y = \frac{-2x}{x^2-y^2},\ ]$, c) $[z_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\ z_y = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\ ]$, d) $[z_x = \frac{|y|}{x^2+y^2},\ z_y = \frac{-x\cdot|y|}{y(x^2+y^2)}]$, e) $[z_x = \frac{-y}{(x^2+y^2)}$, $z_y = \frac{x}{x^2+y^2}\ ]$, f) $[z_x = \frac{y}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})^2},\ z_y = \frac{-x}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})^2}\ ]$.

Cvičení 3.7. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v daném bodě:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, \qquad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$$
$$\text{b) } f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad [x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?].$$

Výsledky 3.7. a) $[3x + 5y - z = 4\ ]$, b) $[z_0 = -\frac{\pi}{4},\ x + y - 2z = \frac{\pi}{2}\ ]$.

Určete parciální derivace prvního řádu:

1) $f(x,y) = 2x^3 \cdot y - 4x \cdot y^2 + 2x + 3;$

2) $f(x,y) = y \cdot \sqrt{x} - 3\frac{y^2}{x};$

3) $f(x,y) = 2y^{x+1};$

4) $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x-y};$

5) $f(x,y) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y};$

6) $f(x,y) = x \cdot \mathrm{e}^{2x-y} + 3y^2 - 1;$

7) $f(x,y) = x \cdot y \cdot 2^{\frac{x}{y}};$

8) $z = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 y};$

Řešení:

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y - 4y^2 + 2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - 8xy;$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{x}} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x} - 6\,\frac{y}{x};$

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^{x+1} \cdot \ln y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+1)y^x;$

4) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x-y)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2};$

5) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2};$

6) $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{2x-y}(1+2x),\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x\mathrm{e}^{2x-y} + 6y;$

7) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2^{\frac{x}{y}}\,(y + x\ln 2),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2^{\frac{x}{y}}\left(x - \frac{x^2}{y}\ln 2\right);$

8) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 y},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos^2 x \sin 2y}{(1+\sin^2 y)^2};$