12. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 2/CF (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Lineární rovnice 1. řádu bez pravé strany

Jedná se o rovnici typu $a(x)y' + b(x)y = 0$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou funkce proměnné x, $a \not\equiv 0$. Tato rovnice je řešitelná metodou separace proměnných.

$$1)\quad y' + \frac{y}{\sin^2 x} = 0 \qquad 2)\quad \frac{y'}{x} - e^x\, y = 0 \qquad 3)\quad 2y' - y \ln x = 0$$

2. Lineární rovnice 1. řádu

Jedná se o rovnici typu $a(x)y' + b(x)y = \mathcal{R}(x)$, kde $a(x)$, $b(x)$, $\mathcal{R}(x)$ jsou funkce proměnné x, $a \not\equiv 0$. Nejdříve vyřešíme příslušnou rovnici bez pravé strany $a(x)y' + b(x)y = 0$ (separací proměnných), jejíž obecné řešení vyjde ve tvaru $y = C\,u(x)$. Obecné řešení dané rovnice hledáme metodou *variace konstanty*, která spočívá v tom, že ho hledáme ve tvaru $y = k(x)\,u(x)$, kde $k(x)$ nyní není konstanta, ale je to funkce proměnné x.

$$4)\quad y' + y\,\sin x = \frac{4x^2-1}{x^2}\,e^{\cos x} \qquad 5)\quad y'\,\sin x + y\,\cos x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad 6)\quad xy' + 2y = \frac{4}{2x^2+1}$$

3. Lineární rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany

Jedná se o rovnici typu $ay' + by = 0$, kde a, b jsou reálné konstanty, $a \neq 0$. Metoda řešení je založena na jednoduchém pozorování, že její řešení je možné hledat ve tvaru $y = e^{\lambda x}$. Dosazením y a y' do diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici $a\lambda + b = 0$ (*charakteristická rovnice*). Obecné řešení diferenciální rovnice pak je $y = C\,e^{\lambda x}$, kde $\lambda = -b/a$ (kořen charakteristické rovnice) a C je libovolná reálná konstanta.

$$7)\quad y' + 4y = 0 \qquad 8)\quad 2y' = 5y \qquad 9)\quad y' + \tfrac{1}{2}y = 0$$

4. Lineární rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Jedná se o rovnici typu $ay' + by = \mathcal{R}(x)$, kde a, b jsou reálné konstanty, $a \neq 0$, $\mathcal{R}(x)$ je funkce, která je ve tvaru $\mathcal{R}(x) = e^{px}\big(\mathcal{P}_1(x)\cos(qx) + \mathcal{P}_2(x)\sin(qx)\big)$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{P}_1(x)$, $\mathcal{P}_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m. Řešení takové rovnice má tvar $y = C\,e^{\lambda x} + v(x)$, kde $C\,e^{\lambda x}$ je obecné řešení příslušné rovnice bez pravé strany (viz odstavec 3) a $v(x)$ je jedno (pevné) řešení dané rovnice, které lze hledat v podobném tvaru jako je pravá strana $\mathcal{R}(x)$. Tedy $v(x) = x^r\,e^{px}\big(\mathcal{Q}_1(x)\cos(qx) + \mathcal{Q}_2(x)\sin(qx)\big)$, kde $\mathcal{Q}_1(x)$, $\mathcal{Q}_2(x)$ jsou polynomy stupně m a číslo $r = 1$, pokud $p = -b/a$ (tj. číslo p v exponentu exponenciální funkce je kořenem charakteristické rovnice), $r = 0$, tj. $x^r = 1$, pokud $p \neq -b/a$. Nyní stačí nalézt polynomy $\mathcal{Q}_1(x)$, $\mathcal{Q}_2(x)$. Tato metoda se nazývá *metoda neurčitých koeficientů*.

$$10)\quad 2y' - y = x \qquad 11)\quad y' + y = 2\sin x \qquad 12)\quad y' - 2y = e^{2x}$$

 (poslední aktualizace 10. května 2014).

5. Diferenciální rovnice 1. řádu různých typů

Některé z následujících rovnic jsou současně více typů. Vyřešte je všemi známými metodami a porovnejte výsledky.

13) $x + xy' = y$ 14) $y' - \frac{y}{x} = 2$ 15) $y' - \frac{y}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$

16) $xy' - 3y = 12$ 17) $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 18) $y' + 2y = e^{2x}$

Výsledky.

1) $y = C\,e^{\operatorname{cotg} x}$	2) $y = C\,e^{(x-1)e^x}$
3) $y = C\,x^{\frac{x-1}{2}}$	4) $y = \left(4x + \frac{1}{x} + C\right)e^{\cos x}$
5) $y = \frac{C - \operatorname{cotg} x}{\sin x}$	6) $y = \frac{C + \ln(2x^2+1)}{x^2}$
7) $y = C\,e^{-4x}$	8) $y = C\,\sqrt{e^{5x}}$
9) $y = \frac{C}{\sqrt{e^x}}$	10) $y = C\,\sqrt{e^x} - x - 2$
11) $y = \frac{C}{e^x} + \sin x - \cos x$	12) $y = C\,e^{2x} + x\,e^{2x}$
13) $y = x\,\ln\left\lvert\frac{C}{x}\right\rvert$	14) $y = C\,x + x\ln x^2$
15) $y = C\,e^{\operatorname{arctg} x} - 1$	16) $y = Cx^3 - 4$
17) $y = C\,e^{\arcsin x} - 1$	18) $y = C\,e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$

Poznámky. 5.1.

- Metoda pro řešení lineárních rovnic z odstavce 2 je univerzální. Touto metodou lze řešit také rovnice z odstavce 4.
- Rovnice 13) a 14) jsou současně homogenní (viz cvičení z 11. týdne) i lineární. Rovnice 15), 16) a 17) jsou současně lineární i separovatelné. Rovnici 18) můžeme řešit metodou z odstavce 4 a také metodou z odstavce 2.

12. LDR 1. ŘÁDU

12.1. LDR 1. ŘÁDU BEZ PRAVÉ STRANY (H)

12.1.1. $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$$

$$\ln|y| = \operatorname{cotg} x + c$$

$$|y| = e^{\operatorname{cotg} x + c}$$

$$|y| = e^{\operatorname{cotg} x} \cdot e^{c}$$

$$\underline{y = C \cdot e^{\operatorname{cotg} x}}$$

12.1.2. $\frac{y'}{x} - e^x y = 0$

$$\frac{y'}{x} = e^x y$$

$$\frac{dy}{x\,dx} = e^x y$$

$$\frac{dy}{y} = x e^x\,dx \quad \Big|\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

$$\ln|y| = x e^x - \int e^x\,dx$$

$$\ln|y| = x e^x - e^x + k$$

$$|y| = e^{e^x(x-1) + k} = e^{e^x(x-1)} \cdot e^{k}$$

$$\underline{y = C \cdot e^{e^x(x-1)}}$$

12.1.3. $2y' - y \ln x = 0$

$$2\frac{dy}{dx} = y \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\,dx \quad \Big|\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\left(x \ln x - \int dx\right)$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(x \ln x - x) + c$$

$$|y| = e^{\frac{x \ln x - x}{2} + c}$$

$$\underline{y = C \cdot e^{\frac{x \ln x - x}{2}}}$$

$$\boxed{y = C \cdot \sqrt{e^{x \ln x - x}}}$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$x^{\frac{x-1}{2}} = e^{\frac{x-1}{2} \ln x} = e^{\frac{1}{2}(x \ln x - \ln x)}$$

12.2. LDR 1. ŘÁDU (N)

12.2.4. $y' + y \sin x = \frac{4x^2 - 1}{x^2} e^{\cos x}$

(H): $y' + y \sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$$

$$\frac{dy}{y} = -\sin x\,dx$$

$$\ln|y| = \cos x + k$$

$$|y| = e^{\cos x + k}$$

$$y = C \cdot e^{\cos x}$$

$$y = C(x) \cdot e^{\cos x}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{\cos x} + C(x) e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

(N):

$$C'(x) e^{\cos x} \cancel{- C(x) \sin x\, e^{\cos x}} + \cancel{C(x) e^{\cos x} \sin x} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} e^{\cos x} \quad \Big| : e^{\cos x}$$

$$C'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2} \quad \Big| \int$$

$$C(x) = \int (4 - x^{-2})\,dx$$

$$C(x) = 4x - \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

(H)+(N):

$$\underline{y = \left(4x + \frac{1}{x} + C\right) \cdot e^{\cos x}}$$

12.2.5. $y' \sin x + y \cos x = \frac{1}{\sin^2 x}$

(H): $y' \sin x + y \cos x = 0$

$$\frac{dy}{dx} \sin x = -y \cos x$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + k$$

$$|y| = e^{\ln|\sin x| + k}$$

$$\boxed{y = \frac{C(x)}{\sin x}}$$

$$y' = \frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x}$$

(N): $\frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} \cdot \sin x + \frac{C(x)}{\sin x} \cos x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$$C'(x)\sin^2 x - \cancel{C(x)\cos x \sin x} + \cancel{C(x)\cos x \sin x} = 1$$

$$C'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$C(x) = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \boxed{-\operatorname{ctg} x + C}$$

(H)+(N): $\boxed{y = \frac{-\operatorname{ctg} x + C}{\sin x}}$

$$y = \frac{-\frac{\cos x}{\sin x} + C}{\sin x} = \frac{-\cos x + C \sin x}{\sin^2 x}$$

12.2.6. $xy' + 2y = \frac{4}{2x^2+1}$

(H): $xy' + 2y = 0$

$$x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c$$

$$|y| = e^{\ln x^{-2} + c}$$

$$y = C \cdot x^{-2}$$

$$\boxed{y = \frac{C(x)}{x^2}}$$

$$y' = \frac{x^2 C'(x) - 2x C(x)}{x^4}$$

(N): $x \cdot \frac{x C'(x) - 2 C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^2} = \frac{4}{2x^2+1}$

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{4}{2x^2+1}$$

$$C'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$$

$$C(x) = \int \frac{4x}{2x^2+1} dx = \boxed{\ln(2x^2+1) + C}$$

(H)+(N): $\boxed{y = \frac{\ln(2x^2+1) + C}{x^2}}$

12.3. LDR s konst. koef. bez pravé str.

$ay' + by = 0$ OŘ (H): $y = C \cdot e^{-\frac{b}{a}x}$

12.3.7. $y' + 4y = 0$

$y = C \cdot e^{-4x}$

12.3.8. $2y' = 5y$

$2y' - 5y = 0$

$y = C \cdot e^{\frac{5}{2}x}$

$y = c \cdot \sqrt{e^{5x}}$

12.3.9. $y' + \frac{1}{2}y = 0$

$y = C e^{-\frac{\frac{1}{2}}{1}x}$

$y = C e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{c}{\sqrt{e^x}}$

12.4. LDR 1. řádu s konst. koef. a spec. pravou str.

$ay' + by = R(x)$

$R(x) = e^{px}(P_1(x)\cos(qx) + P_2(x)\sin(qx))$

$P_1(x), P_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m

$Q_1(x), Q_2(x)$ jsou polynomy stupně m

$y = C \cdot e^{-\frac{b}{a}x} + r(x)$

$r(x) = x^{n} \cdot e^{px}(Q_1(x)\cos(qx) + Q_2(x)\sin(qx))$

$n = 1$ … pokud $p = -\frac{b}{a}$

$n = 0$ … pokud $p \neq -\frac{b}{a}$

12.4.10. $2y' - y = x$ $= e^{0x}(x \cdot \cos 0x + \sin 0x)$

(H): $\boxed{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}}$

(N): $\boxed{r(x) = Ax + B}$

$r'(x) = A$

dosazení do zadání

$2 \cdot A - Ax - B = x$

$x^1: \ -A = 1 \Rightarrow A = -1$

$x^0: \ 2A - B = 0 \Rightarrow B = -2$

OŘ (N):

$y = C\sqrt{e^x} - x - 2$

3 | 6

12.4.11. $y' + y = 2\sin x$

(H): $y = C\cdot e^{-x}$

(N): $y = c\cdot e^{-x} + r(x)$

$r(x) = A\cdot \sin x + B\cdot \cos x$

$r'(x) = A\cos x - B\sin x$

dosadit do zadání

$A\cos x - B\sin x + A\sin x + B\cos x = 2\sin x$

$\sin x:\quad -B + A = 2$

$\cos x:\quad B + A = 0$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$B = -1$

$$y = \frac{C}{e^x} + \sin x - \cos x$$

12.4.12. $y' - 2y = e^{2x}$

(H): $\boxed{y = C\cdot e^{2x}}$

(N): $y = C\cdot e^{2x} + r(x)$

$r(x) = A\cdot x^k \cdot e^{2x} = A\cdot x\cdot e^{2x}$; protože 2 je řešením char. rce je $k = 1$

$r'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$

dosadit: $Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = e^{2x}$

$A = 1$

$$\boxed{y = C\cdot e^{2x} + xe^{2x}}$$

12.5. DR 1. ŘÁDU RŮZNÝCH TYPŮ

12.5.13. $x + xy' = y$ $\qquad xy' - y = -x$

(H): $xy' = y$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + k$

$\boxed{y = C\cdot x}$

(N): $y = C(x)\cdot x$

$y' = C'(x)\cdot x + C(x)$

$x + x^2\cdot C'(x) + \cancel{xC(x)} = x\cdot C(x)$

$C'(x) = -\frac{x}{x^2}$

$C(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C$

(H)+(N):

$y = (-\ln|x| + c)\cdot x$

$y = (-\ln|x| + \ln k)\cdot x$

$y = x\cdot \ln\frac{k}{|x|}$

$\boxed{y = x\cdot \ln\frac{K}{x}}$

4/6

12.5.14. $y' = \frac{y}{x} - 2$ $\quad \Big/ \frac{y}{x} = z; \quad y' = xz' + z$

$$xz' + z - z = 2$$

$$xz' = 2$$

$$x\frac{dz}{dx} = 2$$

$$\int dz = \int \frac{2}{x}\, dx$$

$$z = 2\ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = \ln x^2 + C$$

$$\underline{y = x\ln x^2 + Cx}$$

12.5.15. $y' - \frac{y}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$

$$y' = \frac{y}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot(y+1)$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\ln|y+1| = \operatorname{arctg} x + k$$

$$|y+1| = e^{\operatorname{arctg} x + k}$$

$$|y+1| = e^{\operatorname{arctg} x}\cdot e^{k}$$

$$y+1 = e^{\operatorname{arctg} x}\cdot C$$

$$\underline{y = C\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - 1}$$

5/6

12.5.16. $xy' - 3y = 12$

$$xy' = 3y + 12$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = 3(y+4)$$

$$\frac{dy}{y+4} = \frac{3}{x} dx$$

$$\ln|y+4| = 3\ln|x| + k$$

$$|y+4| = e^{\ln|x^3| + k}$$

$$y + 4 = C \cdot x^3$$

$$\underline{y = C \cdot x^3 - 4}$$

12.5.17. $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(y+1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\ln|y+1| = \arcsin x + k$$

$$|y+1| = e^{\arcsin x + k}$$

$$y + 1 = C \cdot e^{\arcsin x}$$

$$\underline{y = C e^{\arcsin x} - 1}$$

12.5.18. $y' + 2y = e^{2x}$

(H): $y = C \cdot e^{-2x}$

OŘ (N): $y = C \cdot e^{-2x} + v(x)$

PŘ (N): $v(x) = Ax^r \cdot e^{2x}$

$r = 0$, protože 2 není kořenem char. rce (-2)

$$v(x) = Ae^{2x}$$

$$v'(x) = 2Ae^{2x}$$

dosadit do zadání

$$2Ae^{2x} + 2 \cdot Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} = e^{2x}$$

e^{2x}: $4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

OŘ (N): $\boxed{y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}}$

6/6