Zápočtová písemka Finance - kombi – skupina A ..................................................

1) Načrtněte definiční obor dané funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{\sqrt{y - x + 1}}.$$

2) Určete všechny druhé parciální derivace funkce

$$f(x,y) = 2x^2y - 3x + xy^3 + \ln(2x - y).$$

3) Vyšetřete vázané extrémy funkce $f$ vázané podmínkou $M$, kde

$$f(x,y) = 2x + 4y + 5, \qquad M:\ 2x^2 + y^2 = 18.$$

4) Vyřešte:

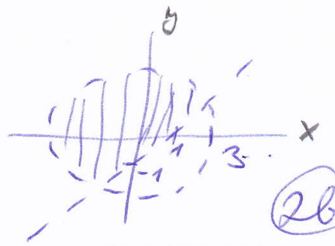
$$\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1 - ln^2 x}}$$

1) $9 - x^2 - y^2 > 0$

$9 > x^2 + y^2$ (1b)

$y - x + 1 > 0$

$y > x - 1$ (1b)




(2b)

2) $f'_x = 4xy - 3 + y^3 + \frac{2}{2x-y}$ (1b)

$f'_y = 2x^2 + 3xy^2 - \frac{1}{2x-y}$

$f''_{xx} = 4y - \frac{4}{(2x-y)^2}$ (1b)

$f''_{xy} = 4x + 3y^2 + \frac{2}{(2x-y)^2}$ (1b)

$f''_{yy} = 6xy - \frac{1}{(2x-y)^2}$ (1b)

3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = 0$

$4y - 16x = 0$ (1b)

$y = 4x$

$2x^2 + y^2 = 18$

$2x^2 + 16x^2 = 18$ (1b)

$x = \pm 1$

$A[-1; -4]$ $f(A) = -13$ váz. MIN (2b)

$B[1; 4]$ $f(B) = 23$ váz. MAX

4) $\int \frac{2dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t =$ (1b) (1b) (1b)

$= 2\arcsin(\ln x) + c$ (1b)

Zápočtová písemka Finance - kombi – skupina B ....................................................

1) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce
$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + x\ln\frac{y}{2} + y$$
v bodě $T = [-1; 2; ?]$.

2) Vyšetřete lokální extrémy funkce
$$f(x,y) = 6 + 3x^2 - 2xy + y^2 + 20x - 4y.$$

3) Určete všechny první parciální derivace funkce
$$f(x,y) = x\sin(3x - y^2) + \frac{3x - 2y}{x+3}.$$

4) Vyřešte:
$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

1) $z_0 = 3(-1)^2 + 2\cdot 4 - \ln 1 + 2 = 3 + 8 + 2 = 13$ 1b

$f'_x = 6x + \ln\frac{y}{2}$ 1b $\quad f'_x(T) = -6 + \ln 1 = -6$ 1b

$f'_y = 4y + x\frac{1}{\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2} + 1 \quad f'_y(T) = 8 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{17}{2}$

$\rho: z - 13 = -6(x+1) + \frac{17}{2}(y-2)$

$z = -6x + \frac{17}{2}y + 13 - 6 - 17$

$\boxed{z = -6x + \frac{17}{2}y - 10}$ 1b

2) $f'_x = 6x - 2y + 20$ 1b $\quad D_1 = 6 > 0$ 1b

$f'_y = -2x + 2y - 4 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$

$6x - 2y + 20 = 0$
$-2x + 2y - 4 = 0$ $(+)$

$4x + 16 = 0$ 1b

$x = -4$

$-2\cdot(-4) + 2y - 4 = 0$

$y = -2$ 1b

$\boxed{[-4; -2] \text{ lok MIN}}$

3) $f'_x = \sin(3x - y^2) + x\cdot\cos(3x-y^2)\cdot 3 + \frac{3(x+3) - (3x-2y)}{(x+3)^2} = \sin(3x-y^2) + 3x\cos(3x-y^2) + \frac{9+2y}{(x+3)^2}$ 2b

$f'_y = x\cdot\cos(3x-y^2)\cdot(-2y) - \frac{2}{x+3}$ 2b

4) $\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}$ 1b $= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$ 1b $= \left| \begin{matrix} t = \frac{x+1}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dx \\ 2dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int\frac{2dt}{t^2+1}$ 1b $= \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C}$ 1b