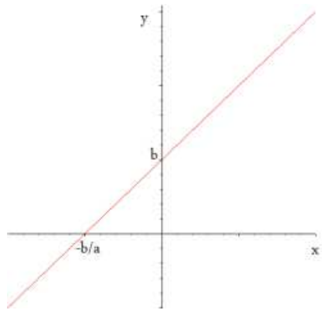
Funkce jedné reálné proměnné

- lineární
- kvadratická
- racionální
- exponenciální
- logaritmická
- s absolutní hodnotou

lineární

y = ax + b

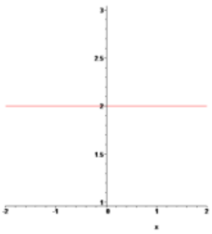
Průsečíky s osami:
Px [-b/a; 0]
Py [0; b]



grafem je přímka (získá se pomocí tabulky nebo průsečíků)

Df = Hf = R

a > 0 – funkce je rostoucí
a < 0 – funkce je klesající
a = 0 – **konstantní funkce**
např. y = 2



b = 0 – jedná se o přímou úměrnost a graf vždy prochází bodem [0;0]

Příklad:
Zapište rovnici lineární funkce, která prochází body A[3;1], B[-1;2].

Řešení:
rovnice má obecný tvar y = ax + b
souřadnice bodů A a B jsou vlastně x, y
Dosadíme oba body do obecné rovnice:
A: 1 = 3a + b
B: 2 = -1a + b
Řešíme jako soustavu:
1 – 3a = b
2 + 1a = b
tedy 1 – 3a = 2 + a
-1 = 4 a
a = -1/4

b = 1 – 3a = 1 – 3(-1/4) = 1 + ¾ = 7/4

Hledaná rovnice: *y = -1/4 x + 7/4*

Příklad: Napište rovnici přímé úměrnosti procházející bodem [2;5]

kvadratická

$y = ax^2 + bx + c$

grafem je parabola

Df = R

Hf (když a > 0) = $\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty)$

(když a < 0) = $\left(-\infty; c - \frac{b^2}{4a}\right\rangle$

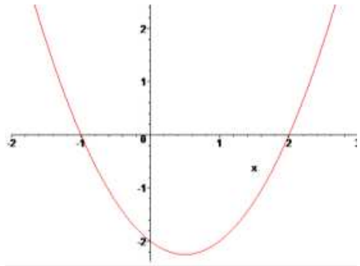
a > 0 – parabola je omezená zdola (je ve tvaru U)

a < 0 – parabola je omezená shora (je ve tvaru ʌ)

graf získáme dvěma způsoby:

- pomocí průsečíků s osou x – které získáme pomocí diskriminanta nebo rozkladem

  např.: $y = x^2 - x - 2$

  $D = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 9$

  $x_{1,2} = (1 \pm 3) / 2$

  $x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

  přes Vietovy vzorce:

  $y = (x - 2)(x + 1)$

  $x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

  Takto tedy získáme průsečíky s osou x a vrchol paraboly má souřadnici x vždy přesně mezi těmito dvěma body. Toto číslo tedy získáme průměrem z kořenů Vx = (2 + (-1)) / 2 = 0,5
  Takže souřadnice x vrcholu V je 0,5.
  Souřadnici y získáme snadno, dosadíme do rovnice souřadnici x:

  $y = x^2 - x - 2 = 0{,}5^2 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25$

  Souřadnice vrcholu tedy jsou V [0,5; -2,25]

- pomocí úpravy funkce (říká se jí – úprava na čtverec)

  Pokud nelze graf získat předchozím způsobem – např. proto, že je diskriminant záporný, používá se tento způsob:

  Upravíme funkci na tvar: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

  Např.: $y = x^2 - x - 2$

  $y = x^2 - x - 2 = (x - 0{,}5)^2 - 2{,}25$

  Z tohoto zápisu lze hned vyčíst souřadnice vrcholu **V** $\left[\boldsymbol{\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}}\right]$

  Podle znaménka a poznáme, kam je parabola otočená.

  Tedy V [0,5; -2,25] a a = 1, parabola je rozevřená nahoru.

Př.: Nakreslete graf fce $y = x^2 - 2x + 3$

racionální

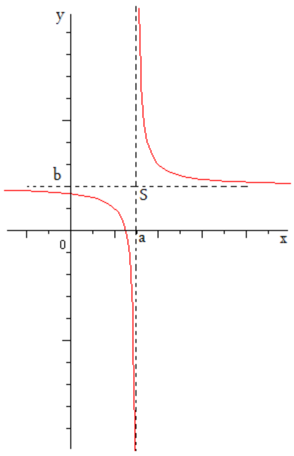
neboli lomenná funkce

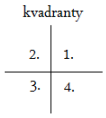
grafem je hyperbola

základní tvar: $y = b + \frac{k}{x-a}$

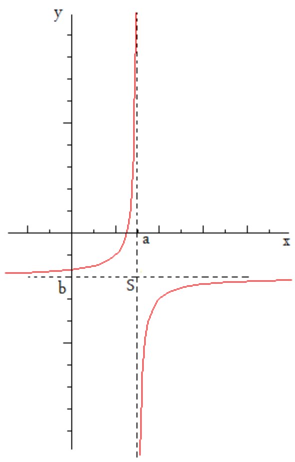
souřadnice [a ; b] určují posunutí počátku (středu grafu)
konstanta k určuje rychlost růstu grafu a kvadranty, ve kterých se graf nachází

k > 0 graf je v 1. a 3. kvadrantu





k < 0 graf je ve 2. a 4. kvadrantu



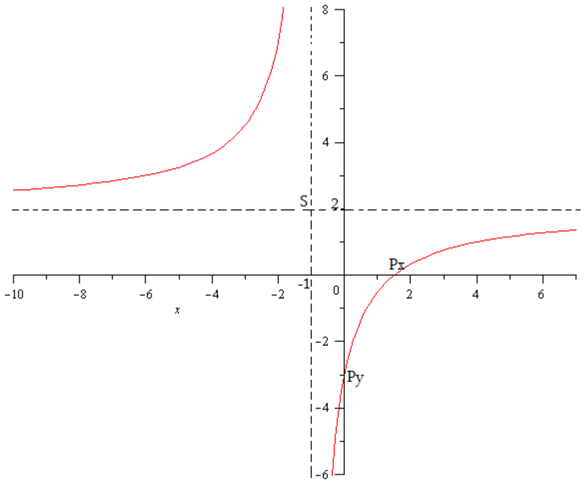
Příklad:

Sestrojte graf funkce $y = \frac{2x-3}{x+1}$

Funkci si musíme nejdřív upravit na základní tvar: (buď pomocí dělení, nebo tímto druhým způsobem)

$$y = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2\cdot(x+1)-2-3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} - \frac{5}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

Střed grafu je tedy v bodě S [-1;2] a graf leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu:



Průsečíky grafu s osama zjistíme snadno:

- průsečík s osou x

Px

do rovnice dosadíme za y nulu: $0 = \frac{2x-3}{x+1}$

$0 = 2x - 3$

$x = \frac{3}{2}$

- průsečík s osou y

Py

do rovnice dosadíme za x nulu: $y = \frac{2\cdot 0-3}{0+1}$

$y = -3$

tedy Px [1,5 ; 0] a Py [0 ; -3]

exponenciální

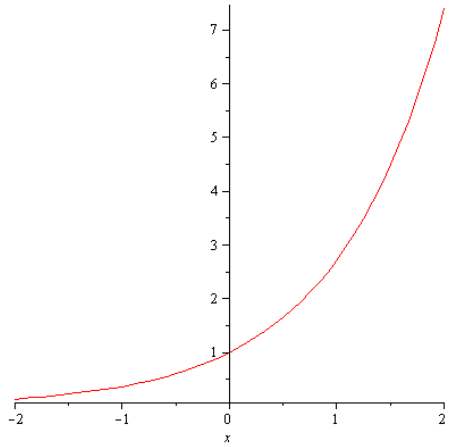
y = a^{x}

grafem je exponenciála

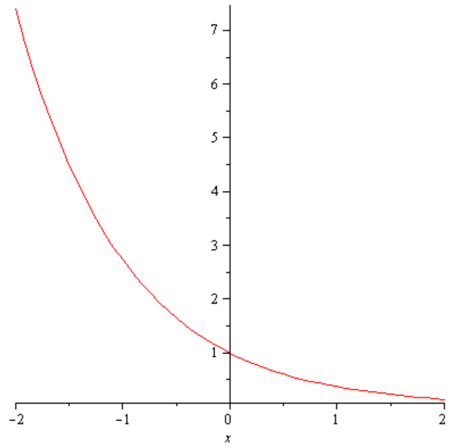
D(f) = R definiční obor
H(f) = (0;+∞) obor hodnot

funkce se liší podle základu a:

a > 1
funkce je rostoucí



0 < a < 1
funkce je klesající



Příklad:

Určete pro který parametr t je funkce f rostoucí: $y = \left(\frac{t}{2t-3}\right)^{x}$

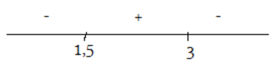
Řešení: Funkce je rostoucí, když základ je větší než jedna. Řešíme tedy nerovnici:

$$\frac{t}{2t-3} > 1$$

$$\frac{t}{2t-3} - 1 > 0$$

$$\frac{t-2t+3}{2t-3} > 0$$

$$\frac{-t+3}{2t-3} > 0$$



Výsledný interval tedy je: (1,5 ; 3)

logaritmická

y = log $_z$ x

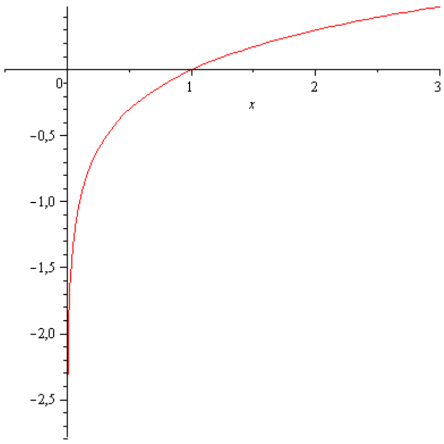
grafem je logaritmická křivka

logaritmická funkce je inverzní funkce k funkci exponenciální, tedy platí: **y = log $_z$ x** $\Rightarrow$ **z^y = x**

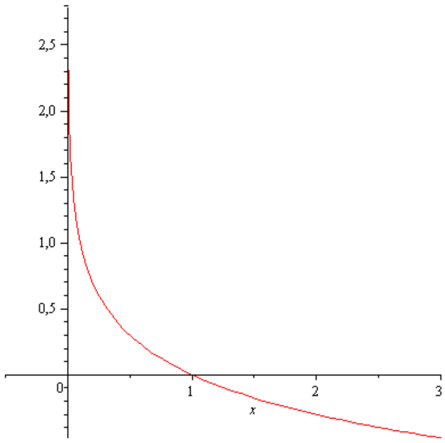
D(f) = (0;+∞) definiční obor
H(f) = R obor hodnot

funkce se liší podle základu z:

z > 1
funkce je rostoucí



0 < z < 1
funkce je klesající



Příklad:
Určete pro který parametr t je funkce f klesající: $y = \log_{\frac{2t}{t-1}} x$

Řešení: Funkce je klesající, když je základ mezi nulou a jedničkou, řešíme tedy soustavu nerovnic:

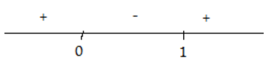
$$0 < \frac{2t}{t-1} < 1$$

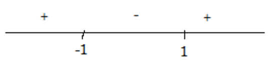
$$0 < \frac{2t}{t-1} \quad \wedge \quad \frac{2t}{t-1} < 1$$

$$\frac{2t}{t-1} - 1 < 0$$

$$\frac{2t - t + 1}{t-1} < 0$$

$$\frac{t+1}{t-1} < 0$$



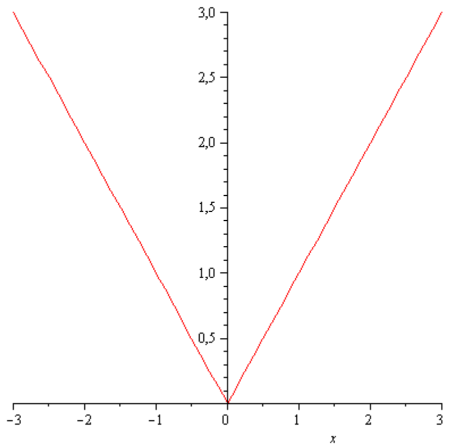


$$t \in (-\infty;0) \cup (1;\infty) \wedge t \in (-1;1)$$

výsledný interval je tedy: **(-1;0)**

s absolutní hodnotou

Základní graf funkce $y = |x|$



Grafy funkcí s více absolutními hodnotami získáme tak, že najdeme nulové body absolutních hodnot a přepíšeme si rovnici funkce bez absolutních hodnot dle jednotlivých intervalů.

Příklad: Sestrojte graf této funkce:

$$y = |x - 1| + 2x - |x|$$

Řešení:

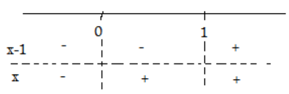
Zjistíme si nulové body – tzn. kdy vycházejí absolutní hodnoty nula.

$x - 1 = 0$ když $x = 1$

$x = 0$ když $x = 0$

Máme tedy dva nulové body – 0 a 1.

Zjistíme si znaménka absolutních hodnot v jednotlivých intervalech a potom přepíšeme funkci pro jednotlivé intervaly podle znamének.



I. interval: $(-\infty;0\rangle$

$y = -x + 1 + 2x + x$

$y = 2x + 1$

II. interval: $\langle 0; 1\rangle$

$y = -x + 1 + 2x - x$

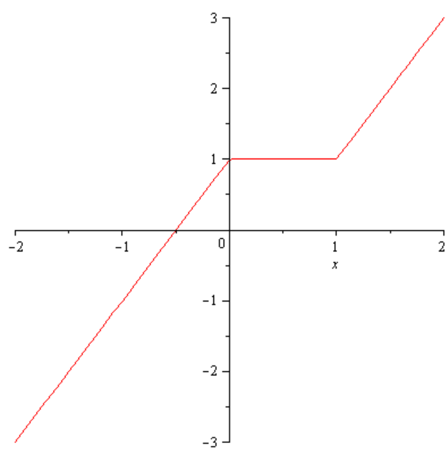
$y = 1$

III. interval: $\langle 1; \infty)$

$y = x - 1 + 2x - x$

$y = 2x - 1$

Nyní již můžeme sestrojit graf a to tak, že pro daný interval x platí vždy daná rovnice, kterou jsme vypočítali.



Poznámka:

průsečíky s osami vypočítáme snadno:

Průsečík s osou x

do rovnice funkce dosadíme za y nulu a počítáme x. Průsečík má pak souřadnice [x;0]

Průsečík s osou y

do rovnice funkce dosadíme za x nulu a počítáme y. Průsečík má pak souřadnice [0;y]

Příklad: Určete průsečíky s oběma osama fce: $f(x) = \left(\frac{4-x^2}{1+3x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

definiční obor funkce

D(f) je vlastně množina nebo interval hodnot, které lze dosadit do funkce za x.
Tzn. abychom určili definiční obor, stačí stanovit podmínky pro tvar dané funkce.

Základní podmínky:

Ve jmenovateli nesmí být nula!
Odmocňovat nesmíme záporné číslo! (nulu ano)
V logaritmu nesmí být záporné číslo ani nula!

Např.:

Určete D(f): $y = \sqrt{\log \frac{1}{4-x}}$

Zde musíme ošetřit všechny tři podmínky – odmocninu, logaritmus, zlomek
Začneme od vnější podmínky – tzn. odmocnina

$$\log \frac{1}{4-x} \geq 0$$
$$\frac{1}{4-x} \geq 1$$
$$\frac{1}{4-x} - 1 \geq 0$$
$$\frac{1-4+x}{4-x} \geq 0$$
$$\frac{-3+x}{4-x} \geq 0$$
$$x \in \langle 3;4)$$

Tímto výpočtem jsme vyřešili i logaritmus, protože jsme počítali, že zlomek v logaritmu musí být větší než jedna. Ze zlomku vychází podmínka že x se nesmí rovnat 4, což jsme také vyloučili, tím je tedy příklad vyřešen. D(f) = ⟨3; 4)

určete funkční hodnotu

Když máme určit funkční hodnotu v nějakém bodě, znamená to, že máme tento bod dosadit do funkce za x a vypočítat y.

Např.:

funkce f: y = 2x – 3
Určete f(2) – čte se to funkční hodnotu v bodě dvě

Tedy pouze dosadíme do funkce f za x bod 2
f(2) = 2 * 2 - 3 = 1
Výsledek je: f(2) = 1

Příklady:

$$f(x)=\left(\frac{8-x^2-2x}{2+5x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Určete:

a)	definiční obor	<-4;2>
b)	průsečík s osou x	[-4,0],[2,0]
c)	průsečík s osou y	[0,2]
d)	obsah trojúhelníka, jehož vrcholy tvoří průsečíky grafu s osami	S=6

Určete pro která reálná čísla „a“ platí:

a)	$f(x) = 3x^2 – 2x + 1$	$f(a-1) > f(a) – 7$	[a<2]
b)	$f(x) = -3x^2 + 9x - 8$	$f(a-1) < f(a) + 6$	[a<3]
c)	$f(x) = -x^2 + 2x - 3$	$f(a-4) > f(a) + 8$	[a>4]

Určete koeficienty a, b, c funkce $f(x) = ax^2+bx+c$ tak, aby platilo: f(0) = 3, f(2) = 5, f(-1) = -4. [-2;5;3]

Funkce f(x) = $|2x+1|+|x+1|-2$ je definována na intervalu <-3;2>. Určete obor funkčních hodnot funkce f.

[<-1,5;6>]

Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \log(|x+1| - |2x+1| + 2)$, $[(-2, 2)]$

b) $f(x) = \log(|2x+2| + |3x+1| - 5)$, $[(-\infty, -\frac{8}{5}) \cup (\frac{2}{5}, \infty)]$

c) $f(x) = \left(\frac{3x - x^2 + 10}{40 + 2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $[\langle -2, 5\rangle]$

d) $f(x) = \left(\frac{20 - x^2 - x}{11x^2 + 5}\right)^{\frac{1}{2}}$, $[\langle -5, 4\rangle]$

e) $f(x) = \left(\frac{\log(2-x)}{-5-2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $[\langle 1, 2)]$

f) $f(x) = \left(\frac{\log(1+x)}{-4x^2-7}\right)^{\frac{1}{2}}$. $[(-1, 0\rangle]$

k) $f(x) = \sqrt{\log(\cos x)}$ v intervalu $\langle 0, 2\pi)$, $[\{0\}]$

l) $f(x) = \log(\sin x)$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, $[(0, \pi)]$

m) $f(x) = \sqrt{16 - 4x^2} - \log(x+1)$, $[(-1, 2\rangle]$

n) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \log(1 - 3x)$, $[(-\infty, -1\rangle]$

o) $f(x) = \log(-x^2 + 6x - 9)$, $[\emptyset]$

p) $f(x) = \log\left(1 - \frac{3}{x+1}\right)$, $[(-\infty, -1) \cup (2, \infty)]$

q) $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$, $[(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)]$

r) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$ $[(-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle]$

s) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{3 - x^2}$, $[\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}]$

t) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$, $[\langle -2, 4)]$

u) $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{2 - x - x^2}}$. $[(-2, 0) \cup (0, 1)]$

Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \log(3x - 1)$,
$f(x) = \log|3x - 1|$,
$f(x) = |\log(3x - 1)|$,

b) $f(x) = \frac{1}{\log(2x^2 + 4x - 6)}$,

c) $f(x) = \log(2x^2 - 4x + 6)$,

d) $f(x) = \log(\cos x) + \log(\sin x)$,

e) $f(x) = \sqrt{x^2 3^x - 3^{x+1}}$,

f) $f(x) = \sqrt[8]{2^{\sin x} - 1}$,

g) $f(x) = \log_3(4 - 3x + x^2)$,

h) $f(x) = \frac{\log(3x-2)}{x^2 - x - 2}$,

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\log(x+10)^2}$,

j) $f(x) = \sqrt[4]{\log(3x^2 - 2x)}$,

k) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \cos x$,

l) $f(x) = \log(1 - 3^x)$,

m) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$,

n) $f(x) = \sqrt{-\frac{\log_{\frac{3}{10}}(x-1)}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}}$.

Nakreslete graf funkce $y = f(x)$ v jejím definičním oboru:

a) $y = \frac{|x|+x}{x}$,

b) $y = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$,

c) $y = -x^2 + 2x$,

d) $y = x^2 - x|x-2| - 4$,

e) $y = 2 - |2-x| - 2|x+4| - 3x$,

f) $y = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} - \sqrt{x^2-1}$,

g) $y = x^2 + 6x + 4$,

h) $y = x^2 + 6|x| + 4$,

i) $y = |x^2 - 1|$,

j) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

k) $y = \frac{1}{|x|-1}$,

l) $y = |x-3|$,

m) $y = |x-1| - |x+1|$.