Rovnice a nerovnice v reálném oboru

ROVNICE

- lineární
- kvadratické
- iracionální
- exponenciální
- logaritmické
- s absolutní hodnotou
- s parametrem
- soustavy

NEROVNICE

- lineární
- kvadratické
- logaritmické a exponenciální
- s absolutní hodnotou
- soustavy

LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnice je rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na rovnici tvaru

$$ax + b = 0$$

rozbor:

$$a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \textit{nekonečně mnoho řešení}$$

$$a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \textit{žádné řešení}$$

$$a \neq 0 \qquad \Rightarrow \textit{jedno řešení } x = -\frac{b}{a}$$

úpravy – nejmenší společný násobek jmenovatelů, odstranění závorek, separace x a absolutních členů

$$3\left(\frac{1}{3} + 2x\right) - 2\left(\frac{1}{3} - 3x\right) - \frac{13}{2} = 0$$

1 řešení

$$4\left(x^2 - 25\right) - 5(x-4)(x+4) = 1 - x^2$$

NŘ

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x}$$

R- {-1;+1}

$$\frac{\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2}}{\frac{x}{3} - \frac{x+1}{4}} = x$$

1 řešení, podmínky

- Pro které hodnoty parametru m bude mít rovnice jedno, nekonečně mnoho nebo žádné řešení?

$$\frac{5x-2}{m-3} - \frac{2}{3}x = 4$$

[*m=3 nemá rovnice smysl, m=10,5 nemá řeš., jinak má jedno řešení*]

- Najděte všechny hodnoty parametru a, pro které má rovnice kladné řešení.

$$\frac{2a}{x} - \frac{a-2}{3} = \frac{5}{x}$$

[$m \in (-\infty;2) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$]

- Pro které hodnoty parametrů má rovnice s neznámou x kořen větší než 5?

$$\frac{3x+4a}{3a} + \frac{2x}{6} = 1$$

[$m \in \left(-3;-\frac{5}{2}\right)$]

KVADRATICKÁ ROVNICE

Kvadratická rovnice je rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0$$

rozbor:

$$a = 0 \Rightarrow \textit{lineární rovnice}$$

$$a \neq 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \textit{ryze kvadratická rovnice}$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$a \neq 0 \wedge c = 0 \Rightarrow \textit{kvadratická rovnice bez absolutního členu}$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$\mathrm{x}(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \;\wedge\; ax + b = 0$$

$$x = 0 \;\wedge\; x = -\frac{b}{a}$$

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow \textit{kvadratická rovnice}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D < 0 \;\; \textit{rovnice nemá řešení v R}$$

$$D = 0 \;\; \textit{rovnice má jeden dvojnásobný kořen}$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$D > 0 \;\; \textit{rovnice má dva rozdílné kořeny}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Součinový tvar a Vietovy vzorce:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a(x - r)(x - s) = 0$$

$$r + s = -\frac{b}{a} \qquad r \cdot s = \frac{c}{a}$$

Kvadratické rovnice

$12x^2 - 5x - 3 = 0$ *2 řešení*

$x^2 + 2\sqrt{2}x = -(1 + x^2)$ *1 řešení*

$2x^2 - 10x + 19 = 0$ *NŘ*

$x^2 - x - 12 = 0$ *rozklad*

$x^2 + 7x + 10 = 0$ *rozklad*

$\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+3}{x-1} = 0$ *ryze kvadratická rovnice*

$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$ *kvadratická bez absolutního členu*

$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3x-10}{x^2 - 5x + 6}$ *žádné řešení, podmínky*

- Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla $x_1 = -3$ a $x_2 = 1/2$. [*$2x^2+5x-3$*]
- V rovnici $2x^2 + bx – 9 = 0$ je jeden kořen $x_1 = -3/2$. Určete druhý kořen a koeficient b. [*$b = -3$, $x_2 = 3$*]
- Pro které hodnoty parametru $k \in R$ bude jeden kořen rovnice $4x^2 - 8kx - 6k + 9 = 0$ třikrát větší než druhý? [*Viétovy vzorce, $k = 1$, $k = -3$*]
- Proveďte diskusi počtu řešení kvadratické rovnice v závislosti na parametru m.

$$x^2 + 2x + m^2 = 0$$

IRACIONÁLNÍ ROVNICE

Iracionální rovnice obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Při řešení provádíme neekvivalentní úpravy (umocňování), a proto je zkouška nutnou součástí řešení rovnice.

Pamatujte! $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x+5}+1=x$	$x=4$
$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=3$	$x=1$
$\sqrt{x\sqrt{x}-x}+\sqrt{x}=x$	$x\in\{0;1;4\}$
$3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$	$x=\pm 2$

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

I. způsob – stejné základy

$$a^f = a^g$$
$$f = g$$

II. přes logaritmy

$$a^x = b$$
$$\log_a b = x$$

III. různé základy – zlogaritmujeme rovnici

$$a^f = b^g$$
$$\log a^f = \log b^g$$
$$f \log a = g \log b$$

IV. substituce

$$\sqrt{0{,}2}\cdot\left(\frac{1}{5^3}\right)\cdot 5^{-2x} = 0{,}04$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3}\left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$$

$$3^{5x} = 5^{3x}$$
$$2^x = 100$$

$$0.6^x + 0.6^{x-1} = \frac{40}{9}$$

$$4^x - 10\cdot 2^{x-1} = 24$$

LOGARITMICKÉ ROVNICE

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^b = b \log a$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

dekadický logaritmus má základ 10
přirozený logaritmus má základ e

I. stejné základy

$$\log_z a = \log_z b$$
$$a = b$$

II. přes exponent

$$\log_z a = b$$
$$z^b = a$$

III. zlogaritmujeme rovnici, když je logaritmus v exponentu

IV. substituce

$$\frac{1}{2}\log(3x+6) = \log(x-4)$$

$$\log_2(x-3) = 3$$

$$x^{\log x} = 1000x^2$$

$$1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$$

ROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

$$|x| = 2$$

$$|x-3| = 2$$

$$|x| = |2x+3| + x - 1$$

$$x^2 + 1 = |x^2 - 3x - 4|$$

SOUSTAVY ROVNIC

$$x+2y-z=2$$
$$2x+y+z=7$$
$$x+y+z=6$$

$$x+2y+z=1$$
$$3x-z=6$$
$$7x-4y-5z=16$$

$$2x+y+17z=4$$
$$x-y+4z=1$$
$$y+3z=4$$

Řešte soustavu rovnic s neznámými a proveďte diskusi vzhledem k parametru p:

$$x+(p-1)y=1$$
$$(p+1)x+3y=-1$$

Určete parametr a tak, aby soustava měla oba kořeny kladné:

$$x+ay-1=0$$
$$ax-3ay-(2a+3)=0$$

LINEÁRNÍ NEROVNICE

Při řešení je nutné pamatovat při násobení či dělení nerovnice záporným číslem na otočení znaménka nerovnosti!

$$\frac{1-2x}{x-1}<0$$

$$\frac{x-1}{2-x}\geq 1$$

$$\frac{2x^2+1}{(x-2)(x+1)}\leq 0$$

KVADRATICKÉ NEROVNICE

$$2x^2-3x+4>x^2+2x-2$$

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}\geq 0$$

$$\frac{x^3-8x^2+15x}{-x^2+2x-2}\leq 0$$

V množině přirozených čísel řešte nerovnici:

$$\frac{5x+1}{x-1}-2x-2>0$$

NEROVNICE LOGARITMICKÉ A EXPONENCIÁLNÍ

U exponenciálních a logaritmických nerovnic

- funkce je rostoucí pro základ větší než 1, tzn.:

$$a^f<a^g \qquad \log f<\log g$$
$$f<g \qquad f<g$$

- funkce je klesající pro základ mezi nulou a jedničkou, tzn.:

$$a^f<a^g \qquad \log f<\log g$$
$$f>g \qquad f>g$$

$$2^{x+1}>4$$

$$\log_{0.5}(x^2-x-12)>\log_{0,5}(x+3)$$

$$1\leq\frac{2\log x+3}{2}$$

$$\log_2\frac{3x+1}{x+1}\leq -1$$

$$2^x-5\cdot 4^{x-2}>1-2^{x-1}$$

NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

$$|x| < 2$$

$$|3 - x| \geq 6$$

$$|x| + |x - 1| \geq 2$$

$$\frac{|2x - 2|}{2 - x} < 1$$

$$\left|\frac{x}{x - 3}\right| \leq 1$$

$$\frac{1}{|x - 1|} \geq \frac{2}{|x - 2|}$$

SOUSTAVY NEROVNIC

$$-1 < \frac{x + 2}{3 - 2x} < 3$$

$$1 - \frac{1 - x^2}{x} \geq \frac{2 + 3x}{x}$$

$$0 < x^2 - 3x + 2 < 6$$

$$2 \leq |x - 4| < 3$$