Komplexní čísla

- algebraický tvar
- goniometrický tvar
- operace s komplexními čísly
- absolutní hodnota komplexního čísla
- Moivreova věta
- řešení kvadratických rovnic
- binomická rovnice

algebraický tvar

komplexní čísla = C

z = a + bi

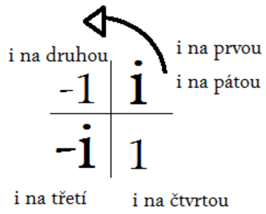
a – reálná část

b – imaginární část

$\bar{z} = a - bi$ komplexně sdružené číslo

mocniny i:

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



operace s komplexními čísly

$z_1 = 2 + 3i$
$z_2 = 1 - 4i$

sčítání: $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 4i) = 3 - 1i$

odčítání: $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 4i) = 1 + 7i$

násobení: $z_1 * z_2 = (2 + 3i) * (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 2 - 5i - 12*(-1) = 14 - 5i$

dělení:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{2+3i}{1-4i} * \frac{1+4i}{1+4i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{1-16i^2} = \frac{2+11i-12}{1+16} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

při dělení se zlomek vždy rozšíří komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli

absolutní hodnota komplexního čísla

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

např.

$$z = 2 - 3i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

goniometrický tvar

nepopisuje čísla pomocí souřadnic a, b ale pomocí úhlu a vzdálenosti od počátku – když body znázorníme v Gaussově rovině

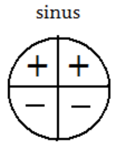
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

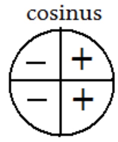
$|z|$ průvodič

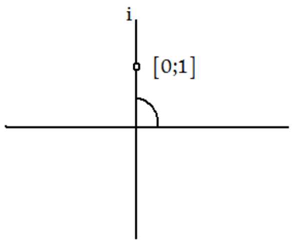
φ amplituda

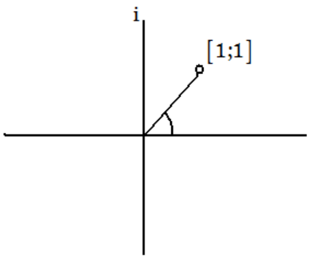
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

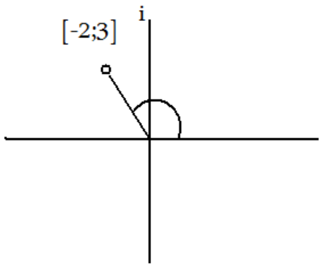
$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$











z = 0 + 1i

z = 1(cos 90° + i sin 90°)

z = 1 + 1i

z = $\sqrt{2}$ (cos 45° + i sin 45°)

z = -2 + 3i

z = ? musíme dopočítat

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos\varphi = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

úhel je ve druhém kvadrantu

(poznáme podle znamének nebo z nákresu)

$$\varphi = 124°$$

z = $\sqrt{13}$ (cos 124° + i sin 124°)

Platí:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi+\beta) + i\sin(\varphi+\beta))$$

Moivreova věta

$$[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$(\sqrt{3}+i)^3 = ?$$

$$(\sqrt{3}+i) = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$$[2(\cos 30° + i\sin 30°)]^3 = 2^3(\cos 3*30° + i\sin 3*30°) = 8(\cos 90° + i\sin 90°) = 8(0+i) = 8i$$

řešení kvadratických rovnic

Pokud vyjde diskriminant záporný – v reálných číslech rovnice nemá řešení, ale v komplexních číslech ano.

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{D}}}{2a}}$$

např.:

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$D = (-2)^2 - 4*1*2 = 4 - 8 = -4$ neboli $4i^2$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}$$

Řešením kvadratické rovnice jsou vždy čísla komplexně sdružená.

binomická rovnice

$\mathbf{ax^n + b = 0}$

vyjádříme $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

n-tá odmocnina z komplexního čísla z:
(kolikátá je odmocnina, tolik bude výsledků)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0,1,2,3\ldots, n-1$$

Např.:

$$\frac{1}{8}x^3 - i = 0$$

$$x^3 - 8i = 0$$

$$x^3 = 8i$$

$$x = \sqrt[3]{8i}$$

$$z = 8i = 8(\cos 90° + i\sin 90°)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{90° + 2k180}{3} + i\sin\frac{90° + 2k180}{3}\right)$$

$$k = 0,1,2$$

$$k = 0$$

$$x_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{90°}{3} + i\sin\frac{90°}{3}\right) = 2(\cos 30° + i\sin 30°) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1$$

$$x_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{90° + 360°}{3} + i\sin\frac{90° + 360°}{3}\right) = 2(\cos 150° + i\sin 150°) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{90° + 720°}{3} + i\sin\frac{90° + 720°}{3}\right) = 2(\cos 270° + i\sin 270°) = 2(0 - 1i) = -2i$$

Příklady:

1. Vypočítejte:
   a) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$ [1]
   b) $(3+2i)i^6 – (-1+3i)^2$ [5+4i]
   c) $(2-i)*(2+4i)/(1+i)$ [7-i]

2. Vypočítejte reálná čísla x, y tak, aby platilo:

   $(2+i)^2(-1+i) = x - 2yi$ [x = -7, y = 0.5]

3. Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla:
   $(1-2i)(2+4i) - (3+i)^2$ [$2\sqrt{34}$]

4. Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je: $x_1 = - 4 - i$
   [$x^2+8x+17=0$]

5. Vypočítejte komplexní kořeny kvadratické rovnice:
   $$x^2 – 10x + 29 = 0$$

6. Převeďte číslo z do goniometrického tvaru:
   a) $z = \sqrt{3} - i$
   b) $z = -\sqrt{3} - i$
   c) $z = ½ - \sqrt{3}\, i/2$

7. Určete imaginární část komplexního čísla z^5
   $z = 3 + 3i$ [-972]

8. Vypočítejte:
   $(-1 + i)^{34}$ [$-2^{17}i$]