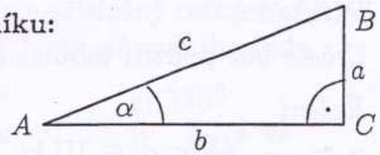
Goniometrie a trigonometrie

- základní goniometrické funkce
- jednoduché goniometrické rovnice
- základní trigonometrické věty a jejich použití

základní goniometrické funkce

Zavedení goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku:

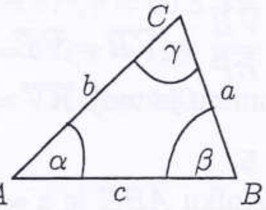
$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$



Pro obecný trojúhelník platí:

Sinová věta: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinová věta:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos\beta$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$



Základní vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\quad \operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x},\ \sin(\tfrac{\pi}{2} \pm x) = \cos x,\ \cos(\tfrac{\pi}{2} \pm x) = \mp \sin x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin x \pm \sin y = 2\sin\tfrac{x\pm y}{2}\cos\tfrac{x\mp y}{2}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}$$

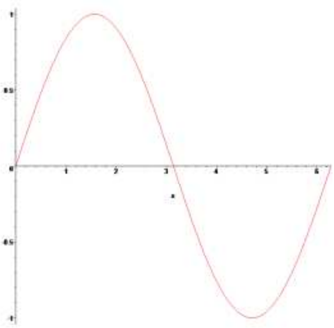
$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}$$

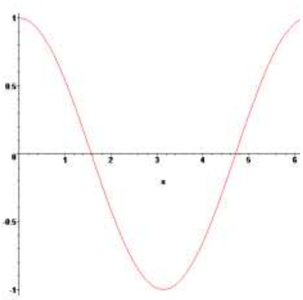
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

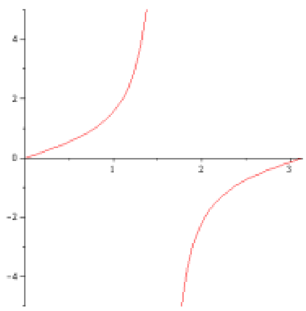
Definice funkcí:

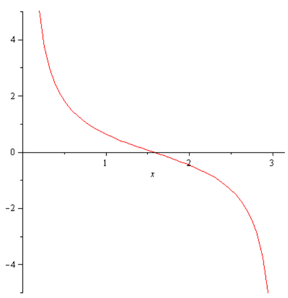
y = sin x	**y = cos x**	**y = tg x**	**y = cotg x**
Df = R	Df = R	Df = R - $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	Df = R – kπ
Hf = $\langle -1;1 \rangle$	Hf = $\langle -1;1 \rangle$	Hf = R	Hf = R
lichá	sudá	lichá	lichá
sin (-x) = - sin x	cos (-x) = cos x	tg (-x) = - tg x	cotg (-x) = - cotg x
perioda 2π	perioda 2π	perioda 1π	perioda 1π

grafy funkcí:

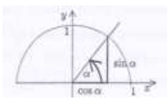


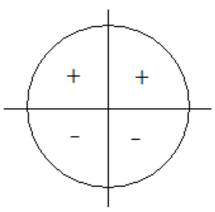


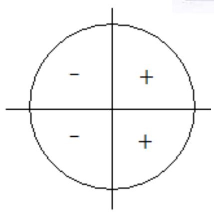


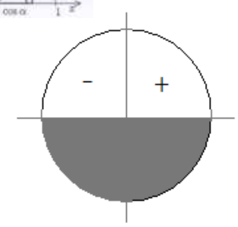


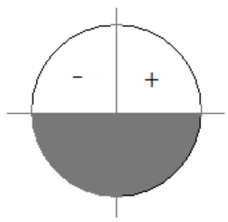
znaménka hodnot funkcí (na jednotkové kružnici):











Tabulka základních hodnot:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*	0
cotg x	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0	*

Příklad:

Vypočítejte hodnoty všech goniometrických funkcí úhlu α, je-li:

sin α = -0,2 a víme, že úhel alfa je ve třetím kvadrantu

Řešení:

$\alpha \in \langle \pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$

cos vypočítáme pomocí vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$0{,}04 + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 0{,}96$$
$$\cos x = \pm\sqrt{0{,}96}$$

víme, že úhel leží ve třetím kvadrantu a v něm nabývá funkce cos x záporných hodnot, tedy

$$\cos x = -\sqrt{0{,}96} = -\sqrt{\frac{96}{100}} = -\frac{\sqrt{6*16}}{10} = -\frac{4\sqrt{6}}{10} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

tg a cotg vypočítáme pomocí vzorců:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-0{,}2}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\cot gx = \frac{1}{tgx} = 2\sqrt{6}$$

Příklad:

Upravte výraz $\frac{1 - tg^2\alpha}{\cos 2\alpha}$

Řešení:

$$\frac{1 - tg^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

jednoduché goniometrické rovnice

Zásady:

- pomocí vzorců zajistíme, aby v rovnici byla pouze jedna goniometrická funkce (např. jen sin x)
- pokud nelze upravit rovnici podle bodu jedna, tak se snažíme upravit rovnici na jedné straně na součin a na druhé straně rovnice mít nulu
- pokud se objeví funkce na druhou – použijeme substituci
- rovnice může mít více řešení
- využívejme při řešení kruhy nebo tabulku:

1. kvadrant	*2. kvadrant*	*3. kvadrant*	*4. kvadrant*
x = a	x = 180 - a	x = 180 + a	x = 360 - a

Příklady:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3},$ $\quad\left[\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x,$ $\quad\left[\left\{k\pi,\ \frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$2-2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x = 0,$ $\quad\left[\left\{k\pi,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}+4\operatorname{cotg} x = 0,$ $\quad\left[\left\{\frac{2}{3}\pi+k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x} = 2,$ $\quad\left[\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5}{3}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$\sin 2x = (\cos x-\sin x)^2,$ $\quad\left[\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$\sin^2 x+\sin^2 2x = 1,$ $\quad\left[\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

$\sin^4 x-\cos^4 x = \frac{1}{2},$ $\quad\left[\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{2}{3}\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right]$

Řešte rovnice v intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$

$2+\cos 2x = -5\sin x,$ $\quad\left[\left\{\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\right\}\right.$

$\sin\frac{x}{2}+\cos x = 1,$ $\quad\left[\left\{0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi\right\}\right.$

Řešte rovnice pro $x\in(-\pi,2\pi\rangle$:

$\operatorname{cotg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$ $\quad\left[\left\{-\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right\}\right.$

základní trigonometrické věty a jejich použití

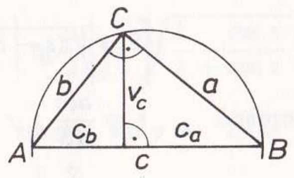
- řešit pravoúhlý trojúhelník
    - goniometrické funkce
    - Pythagorova věta
    - Eukleidova věta

Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$

Eukleidova věta

– **pro výšku** $v_c^2 = c_a \cdot c_b$

– **pro odvěsny** $a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b$



- sinová a kosinová věta (viz. první strana)
- řešit obecný trojúhelník

Příklady:

Z daných prvků v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C vypočtěte další uvedené prvky: b = 12,6 cm, v_c = 7,8 cm; určete α, β, a, c

$$[a = 9{,}93, c = 16{,}04, \alpha = 38°14', \beta = 51°45']$$

V trojúhelníku ABC vypočtěte délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů, je-li dáno: a = 7 m, b = 4 m, γ = 38°

$$[c = 4{,}57, \alpha = 109°23', \beta = 32°36']$$

V obdélníku o rozměrech a = 4 cm, b = 5 cm určete vzdálenost paty kolmice z bodu B na úhlopříčku AC od bodu B.

$$[vzd = 3{,}12cm]$$

Příklady:

1) Vypočítejte sin 2α a cos2α

$\sin\alpha = -\frac{2}{3} \wedge \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi.$ $\left[\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9},\ \cos 2\alpha = \frac{1}{9}\right]$

2) Zjednodušte výraz:

a) $\dfrac{\sin(-\frac{\pi}{5})\cos(x-\frac{\pi}{2}) + \cos(-x)\cos(-\frac{\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin(-\frac{\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$ $[\{1\}]$

b) $\dfrac{\mathrm{tg}\, 8\pi - \mathrm{cotg}\, \frac{7}{2}\pi + \sin 3\pi}{1 + \mathrm{tg}\, \frac{5}{4}\pi + \mathrm{cotg}\, \frac{\pi}{4}}$ $[\{0\}]$

(nápověda: $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$

úhly musíme převést na základní velikost)

3) Urči definiční obor funkcí:

$f(x) = \log(\mathrm{tg}\, x),$ $\left[(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)\right.$

$f(x) = \sqrt{\log(\mathrm{tg}\, x)}.$ $\left[\langle \frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)\right.$