Kombinatorika a pravděpodobnost

- faktoriál
- variace, permutace
- kombinační číslo - pravidla
- kombinace
- binomická věta, Pascalův trojúhelník
- pravděpodobnost

faktoriál

Součin n⋅(n-1)⋅(n-2) … 2 ⋅1 se nazývá n-faktoriál a značí se **n!**.

n je přirozené číslo nebo nula

Platí: 0! = 1

příklad:

Určete, pro která n platí $n! \geq \frac{(n+1)!}{3}$

řešení:

$$n! \geq \frac{(n+1)!}{3}$$

$$n! \geq \frac{(n+1)\cdot n!}{3}$$

$$3n! \geq (n+1)\cdot n!$$

$$3 \geq n+1$$

$$2 \geq n$$

$$n \in \{0;1;2\}$$

Zjednodušte:

$$\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

$[2, n \geq 2]$

Úloha 1. Pro přípustné hodnoty upravte:

(a) $\frac{n!}{(n-2)!} - 2\binom{n}{2}$

(b) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}$

(c) $-\frac{(n+2)!}{(n+3)!} + \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!}$

(d) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}$

(e) $\frac{n!}{(n-3)!} + \binom{n}{2}$

(f) $\frac{n^2-9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

(g) $\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{n^2-4}{(n+2)!}$

(h) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9\frac{n!}{(n-1)!}$

(i) $\frac{n!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} - (n^2+4)$

(j) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+3)!}$

variace, permutace

Variace k-té třídy z n prvků bez opakování se nazývá každá uspořádaná k-tice z daných prvků množiny M. $k \leq n$

U variací záleží na pořadí prvků!

- **Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování**:

  $V_k(n) = n(n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

  Pokud k = n, tzn. děláme uspořádané n-tice z n prvků, jedná se o **permutaci** těchto prvků.

  $P(n) = n!$

- **Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním**

  $V_k'(n) = n^k$

variace bez opakování	variace s opakováním	permutace
Kolik existuje 5-ti ciferných čísel složených z číslic 1 – 6 a jednotlivé číslice se neopakují. (tzn. žádné dvě číslice v čísle nebudou stejné) $V_5(6) = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$	Kolik existuje 5-ti ciferných čísel složených z číslic 1 – 6 a jednotlivé číslice se mohou opakovat. (tzn. v jednom čísle může být několik nebo i všechny číslice stejné) $V_5'(6) = 6^5 = 7776$	Kolik existuje 6-ti ciferných čísel složených z číslic 1 - 6 a jednotlivé číslice se neopakují. $V_6(6) = P(6) = 6! = 720$

Kolik různých trojciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 1,2,3,4,5, nesmí-li se žádná cifra opakovat ? Kolik z nich je sudých ?

[celkem 60, sudých 24]

Počet variací čtvrté třídy z n prvků bez opakování je dvacetkrát větší než počet variací druhé třídy z n prvků bez opakování. Určete počet prvků.

[$n = 7$]

Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet variací třetí třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 168. Určete počet prvků.

[$n = 8$]

Počet variací třetí třídy z n prvků bez opakování je o 225 menší než počet variací třetí třídy s opakováním vytvořených z těchto prvků. Určete počet prvků.

[$n = 9$]

Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací těchto prvků dvacetkrát. Kolik je prvků ?

[$n = 5$]

Pozn.: Permutace existují také s opakováním. Např. určete počet všech 11-ti písmenných slov (i když bez významu), když přeházíme písmena ve slově MISSISSIPPI.

$$P' = \frac{vsechny!}{stejny!} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$$

kombinační číslo – pravidla

Číslo $\binom{n}{k}$ $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \leq n)$ *se nazývá kombinační číslo. Pro kombinační čísla platí:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Př.1 Pro která přirozená n platí $\binom{6}{5}\binom{n+1}{n-1} - \binom{6}{4}\binom{n+2}{n+1} = \binom{4}{2}$?

Řešení: Podle definice a vlastností kombinačních čísel vypočteme

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6,$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15,$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6.$$

$$\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-n+1)!(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}.$$

Dosadíme do rovnice a dále upravujeme za podmínky, že $n \in \mathbb{N}$. Postupně dostáváme:

$$6 \cdot \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - 15 \cdot \frac{(n+2)!}{1!(n-1)!} = 6,$$

$$3 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - 15 \cdot \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 6,$$

$$3n(n+1) - 15(n+2) = 6,$$

$$3n^2 - 12n - 36 = 0,$$

$$n^2 - 4n - 12 = 0,$$

$$n_1 = 6, \; n_2 = -2$$

a současně n je přirozené číslo.

Závěr: Rovnice platí pro $n = 6$.

Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$$

[$\binom{8}{4}$]

Úloha 2. V množině **N** řešte rovnice:

(a) $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{x^2+1}{2}$

(b) $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$

(c) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 4$

(d) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = a^2, a \in \mathbf{N}$

(e) $\binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 5x$

(f) $x! = 380(x-2)!$

(g) $\binom{x}{3} + \binom{x+2}{3} + \binom{x+4}{3} = \frac{x^3+176}{2}$

(h) $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = 6\binom{n}{k} + 2800$

(i) $(n!)^2 - 23 \cdot n! - 24 = 0$

(j) $(2 \cdot n!)^2 + 3 \cdot n! - 7 = 0$

(k) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$

(l) $\binom{n-1}{n-3} - n = 8$

(m) $n\frac{(n+3)!}{(n+2)!} + n^2 = 14$

(n) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} = 4$

(o) $6\binom{x}{x-3} + 3\binom{x}{2} = 2\binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{0}$

(p) $\binom{x}{x-2} - 3\binom{x}{x-1} + 6\binom{x}{x} = 0$

(q) $(n!)^2 - 7 \cdot n! + 6 = 0$

(r) $(n!)^2 + 2 \cdot n! - 48 = 0$

Určete všechna přirozená n, pro která platí:

a) $\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 72$,

b) $2\binom{n+4}{n+2} - 4n \geq 16$,

c) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} \leq 4$.

[a) $n = 2 \vee n = 3$, b) $n \in \mathbb{N}$, c) $n = 4$]

kombinace

Každá k-prvková podmnožina množiny M se nazývá **kombinace** k-té třídy z n prvků.
$k \leq n$

U kombinací nezáleží na pořadí prvků!

- **Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování** je

  $C_k(n) = \binom{n}{k}$

- **Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním** je

  $C_k'(n) = \binom{n+k-1}{k}$

kombinace bez opakování	**kombinace s opakováním**
Máme 6 druhů růží a potřebujeme koupit čtyři různě barevné růže. Kolik je možností, jak vybrat tyto růže? $C_4(6) = \binom{6}{4} = 15$	Máme 6 druhů růží a potřebujeme koupit deset růží. Tzn. že se budou některé barvy opakovat. Kolik je možností, jak vybrat tyto růže? $C_{10}'(6) = \binom{6+10-1}{10} = 3003$

binomická věta, Pascalův trojúhelník

Binomická věta

Pro každá dvě reálná čísla a, b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

k-tý člen binomického rozvoje $A_k = \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$

Pascalův trojúhelník vznikne uspořádáním **binomických koeficientů** $\binom{n}{k}$ do schematu tak, že pro různá $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ jsou v témže řádku kombinační čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

Pro kombinační čísla platí: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (viz Pascalův trojúhelník)

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Příklad:

1) Vypočítejte s použitím binomické věty: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\right)^4$

2) Určete v binomickém rozvoji výrazu: $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

   a) sedmý člen rozvoje
   b) člen neobsahující x

$$\left[a)\frac{105}{8x^{10}} \quad b) a_3 = \frac{45}{256}\right]$$

Kolik je prvků, jestliže počet kombinací čtvrté třídy z nich vytvořených je dvacetkrát větší než počet kombinací druhé třídy z těchto prvků.

[$n = 18$]

Zmenší-li se počet prvků o jeden, zmenší se počet kombinací třetí třídy z nich vytvořených o 45. Určete původní počet prvků.

[$n = 11$]

Kolik je prvků, jestliže počet variací druhé třídy bez opakování z nich vytvořených je o 36 větší než počet kombinací druhé třídy.

[$n = 9$]

Zvětší-li se počet prvků o 8, zvětší se počet kombinací druhé třídy z nich vytvořených jedenáctkrát. Kolik je prvků ?

[$n = 4$]

Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet kombinací třetí třídy z nich vytvořených o 21. Kolik je prvků ?

[$n = 7$]

Dvě skupiny mají dohromady 26 prvků a 160 kombinací druhé třídy. Kolik je prvků v každé skupině ?

[15 a 11]

Pro které reálné číslo $x > 0$ je pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ roven 105 ?

[$x = \frac{1}{8}$]

Pro která reálná čísla je sedmý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[6]{3-2x}\right)^{9}$ roven 168?

[$x = 1$]

Který člen mnohočlenu, vzniklého po výpočtu $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ $(x \neq 0)$ pomocí binomické věty obsahuje x^8? Napište tento člen.

[pátý, $a_5 = 210 \cdot 3^6 x^8$]

Kolik racionálních členů má mnohočlen, který vznikne po výpočtu $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}\right)^{12}$ pomocí binomické věty ? Napište je.

[3 racionální členy: $a_1 = 5^6$, $a_7 = \binom{12}{6} 5^3 2^2$, $a_{13} = 2^4$]

V mnohočlenu, který vznikne výpočtem $\left(\frac{1}{x} + 2x^2\right)^9$ $(x \neq 0)$, určete člen, který neobsahuje x.

[$a_4 = 672$]

V mnohočlenu, který vznikne výpočtem $\left(\frac{1}{3x} - x^3\right)^{11}$ $(x \neq 0)$ pomocí binomické věty, určete koeficient u x^{25}.

[$-\frac{55}{9}$]

V binomickém rozvoji $\left(\frac{1}{x^2} + 2x\right)^{11}$ $(x \neq 0)$ určete člen, který obsahuje x^{-13}. Vypočtěte tento člen.

[$a_4 = \binom{11}{3}(-2)^3 x^{-13} = -1320x^{-13}$]

V binomickém rozvoji $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^7$ $(x \neq 0)$ určete člen, který obsahuje x^{-1}. Vypočtěte tento člen.

[$a_5 = \binom{7}{4} x^{-1} = 35x^{-1}$]

Užitím binomické věty vypočítejte $\left(\frac{1}{2} - 4i\right)^5$.

[$\frac{1}{32} + 620 - \left(\frac{5}{4} + 864\right)i$]

Užitím binomické věty vypočítejte $(1 - \sqrt{3}i)^6$.

[64]

pravděpodobnost

pravděpodobnost jevu = $\dfrac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$

Pokud se jevy A a B navzájem vylučují (tzn. jejich průnik je prázdná množina), pak pravděpodobnost jejich sjednocení je P(A) + P(B).

Jev A´ je opačný jev k jevu A.

P(A´) = 1 – P(A).

Pro neslučitelné jevy platí

P(A∩B) = P(A) * P(B)

Ve třídě je 10 kluků a 15 holek.
Náhodně vybereme 4 žáky (žačky) jako zástupce třídy.

a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali buď 4 kluky nebo 4 holky?
b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali právě 2 kluky a 2 holky?
c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali alespoň jednu holku?

1. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme na kostce dvě šestky po sobě?
(a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{6}$, (c) $\frac{1}{36}$, (d) $\frac{2}{36}$, (e) $\frac{5}{36}$

---

2. Lovec s dvouhlavňovou puškou trefí cíl první ranou s pravděpodobností 0,6 a druhou ranou s pravděpodobností 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že cíl zasáhne alespoň jednou.
(a) 0.9, (b) 0.72, (c) 0.18, (d) 0.12, (e) 0.52

---

3. Lovec s dvouhlavňovou puškou trefí cíl první ranou s pravděpodobností 0,6 a druhou ranou s pravděpodobností 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že cíl první ranou mine a zasáhne druhou.
(a) 0.9, (b) 0.72, (c) 0.18, (d) 0.12, (e) 0.52

---

4. V pytlíku je n černých koulí a 1 bílá. Provedli jsme m ($m \leq n$) tahů při kterých jsme vždy vytáhli černou kouli, kterou jsme nikdy do pytlíku nevrátili. Jaká je nyní pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli.
(a) $\dfrac{1}{n+1}$, (b) $\dfrac{1}{m}$, (c) $\dfrac{m}{n+1}$, (d) $\dfrac{1}{n-m+1}$, (e) $\dfrac{n-m}{n+1}$

---

5. V pytlíku je n černých koulí a 1 bílá. Provedli jsme m ($m \leq n$) tahů při kterých jsme vždy vytáhli černou kouli, kterou jsme vždy do pytlíku vrátili. Jaká je nyní pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli.
(a) $\dfrac{1}{n+1}$, (b) $\dfrac{1}{n}$, (c) $\dfrac{m}{n+1}$, (d) $\dfrac{1}{n-m+1}$, (e) $\dfrac{n-m}{n+1}$

---

6. Jaká je pravděpodobnost při hodu dvěma kostkami, že nám padnou stejná čísla.
(a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{6}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{1}{18}$

[c,b,d,d,a,c]